Joakim Asger Færgeman
Alssundgymnasiet Sønderborg

Unge Forskere 2017

Ny metode til bestemmelse af øvre grænser i Ramsey-teori

Introduktion

Inden for kombinatorisk matematik er Ramsey-teori en af de helt store underemner. Her undersøger man forholdene for hvilket orden under nogle bestemte betingelser nødvendigvis må eksistere. Der findes et utal af disse problemstillinger, som er forblevet ubesvarede grundet en mangel på tilstrækkelige effektive metoder til at angribe sådanne problemer. Kortspillet ''SET'' er et sådant eksempel, hvor man undersøger det maksimale antal kort uden, at såkaldte ''sæt'' fremkommer. Her har man i den forbindelse de sidste 45 år brugt en geometrisk metode, som smart udnytter punkter på linje i et n-dimensionelt rum til at undersøge problemstillingen. Dog viser denne metode sig ubrugelig i andre SET-relaterede problemer, hvor der også undersøges det maksimale antal elementer uden dannelse af lignende sæt, og man har derfor svært ved at håndtere sådanne problemer.

Disse problemstillinger er så svære at besvare, at man næsten aldrig kan give et eksakt svar på det maksimale antal elementer uden sæt, men bliver nødt til at angive sit resultat i form af en øvre grænse. Jeg vil i mit projekt ved hjælp af en ny metode til betragtning og definering af disse elementer, udlede en øvre grænse for en variant til spillet ''SET''.

Problemstilling

Givet unikke kort hver med k kategorier og netop én af fire mulige egenskaber inden for hver kategori, undersøges det maksimale antal kort, der kan eksistere, hvor intet sæt af fire forskellige kort findes, således egenskaberne for hver kategori opfylder et af følgende betingelser:

a) Alle egenskaber er ens
b) Alle egenskaber er forskellige
c) Der er to forskellige grupper af to ens egenskaber

Resultater

Jeg viser via en ny metode, at det maksimale antal kort med k kategorier uden eksistensen af et sådant sæt, N_k, må være mindre end eller lig med det maksimale n, der opfylder følgende ulighed:

$$\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2(4^k-n)}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2(4^k-n)}-10+2n-2\cdot 4^k\leq 0$$

Det vises yderligere, at man godt ville kunne bruge tidligere øvre grænser, der relaterer sig til andre problemstillinger, til en estimering af N_k, men at disse grænser giver en langt større og dårligere værdi af N_k, sammenlignet med min, som det fremgår af følgende tabel:

	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
Min grænse	$N_2 \leq 5$	$N_3 \leq 11$	$N_4 \leq 22$	$N_5 \leq 45$	$N_6 \leq 90$	$N_7 \leq 180$
Nuværende grænser[1]	$N_2 \leq 7$	$N_3 \leq 20$	$N_4 \leq 40$	$N_5 \leq 139$	$N_6 \leq 490$	$N_7 \leq 1751$

Konklusion og potentiale

Den øvre grænse for N_k er altså ikke set før og bidrager til den generelle Ramsey-teori og mere specifikt den matematik, der omhandler ''SET''. Det er imidlertid uklart om grænsen, som den er, kan bruges inden for andre problemstillinger i samme retning. Dog har jeg kun fået skrabet overfladen af den brugbarhed, som min metode til udarbejdning af grænsen kan levere. Min grænse for netop den problemstilling, som jeg undersøger i mit projekt er bare et eksempel på, hvordan man kan udnytte min metode til at definere og betragte elementerne til dannelsen af øvre grænser. Mere generelt kan jeg sige, at metoden med meget stor sandsynlighed vil kunne bruges i de tilfælde, hvor man definerer et sæt som værende en samling af m elementer, der opfylder nogle bestemte betingelser, og hvor der for enhver samling af $m-1$ elementer, eksisterer et entydigt element, b, således samlingen af $m-1$ elementer og b udgør et sæt. På denne måde fungerer metoden altså som et redskab, man kan bruge, hvis man undersøger disse slags problemstillinger inden for Ramsey-teori.

Referencer

Bierbrauer, J. (2004). *Introduction to Coding Theory - Second Edition.* Chapman & Hall/CRC.

Bierbrauer, J., & Edel, Y. (2002). *Bounds on affine caps.* Journal of Combinatorial Designs, 10, 111-115.

Bierbrauer, J., & Edel, Y. (2012). *Large caps in projective Galois spaces.* Nova Science Publishers, 87-104.

Maclagan, D., & Davis, B. L. (2003). *The card game set*. The Mathematical Intelligencer, Vol 25, Issue 3.

http://www.setgame.com/sites/default/files/instructions/SET%20INSTRUCTIONS%20-%20ENGLISH.pdf (besøgt d. 18/02-2

[1] (Bierbrauer & Edel, Large caps in projective Galois spaces) pp. 3